【基础科学理论与应用】 DOI：10.14168/j.issn.1673-4939.2015.03.17

判定函数极值存在性的新方法

李长辉[①]

（辽东学院 师范学院，辽宁 丹东 118003）

摘 要：函数极值的研究，是建立在微积分学理论基础之上的．文章将函数极值与微积分学中值定理基础理论相融合，给出判定函数极值存在性的一种新方法，为解决此类问题带来了极大的方便。

关键词：微积分；极值；中值定理

中图分类号：O174 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-4939（2015）03-0228-02

极值问题是工程技术和经济领域中的常见问题，是微积分应用的重要方面之一。判定函数极值的存在性及计算极值，是经典微积分学最成功的应用。其研究不仅具有理论价值也具有实际意义。作为微积分中一个非常重要的概念，极值描述的是函数的局部性质。函数$y=f(x)$在其定义域内极值的具体确定方法，是通过微积分学的基础理论来探讨的。通常情况下，判定一元函数极值点有三种常用方法，一是用一阶导数在驻点或不可导点附近（邻域）的符号，二是用二阶导数在函数驻点处的函数值的符号（二阶导数存在，不为零），三是用高阶导数的符号。这些方法各有其适用的范围和优点，用一阶导数可判断驻点和不可导点是否为极值点，优点是适用范围比较广，缺点是需要判断这些点左右两边的导数符号是否异号，略显麻烦；用二阶导数只能判断二阶导数不为零的驻点是否为极值点，优点是计算量小，缺点是对于二阶导数等于零的驻点和不可导点方法失效；高阶导数的方法更适用于高阶导数易于求解的函数类，当驻点的二阶导数为零时，可以考虑它的更高阶导数符号，可利用该驻点首次不为零的高阶导数阶数的奇偶性进行判断。

虽然一元函数的极值理论已经相对比较完善，但在判断函数极值点个数方面，方法仍不够简捷。尤其是当函数只有唯一极值点时，若利用一阶导数判断，需要考虑它的所有驻点，计算繁琐。文章将导数与微积分中值定理结合起来，给出利用二阶导数判定函数存在唯一极值点的一种新方法，为判断函数在所给区间内是否存在唯一极值带来了极大的方便。

定义[1] 函数$y=f(x)$在其定义域内点x_0处的极值，是指函数$f(x)$在点x_0的某个δ邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内，对任意的$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，如果总有$f(x)<f(x_0)$成立，则$f(x_0)$为函数$y=f(x)$的极大值；如果总有$f(x)>f(x_0)$成立，则$f(x_0)$为函数$y=f(x)$的极小值。

引理[2] 如果函数$y=f(x)$满足：

(1) $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) $y=f(x)$在开区间(a,b)内可导；

(3) $f(a)=f(b)$

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$（证明略）。

定理 如果函数满足：

(1) $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) $y=f(x)$在区间(a,b)内有二阶导数，并且，在区间(a,b)内$f''(x)\neq 0$；

(3) $f(a)=f(b)$.

则函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有且仅有一个极值点。

证明：第一步，证明函数$y=f(x)$在区间(a,b)内必有极值点。

首先，利用引理，证明函数$y=f(x)$在区间(a,b)内必有导数等于零的点。即存在$\xi\in(a,b)$，使得

① **收稿日期**：2015-07-06
作者简介：李长辉（1965—），男（满族），辽宁丹东人，硕士，副教授，研究方向：微积分理论。

$f'(\xi)=0$。验证条件如下：

(1)函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2)由 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数，可知 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内一阶可导；

(3) $f(a)=f(b)$.

即 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足引理条件，因此，必有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

其次，利用函数极值第二判别法，证明函数 $y=f(x)$ 在 ξ 点处，必定取得极值。

由于 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数，并且在区间 (a,b) 内 $f''(x)\neq0$，因此 $f''(\xi)$ 存在，并且 $f''(\xi)\neq0$。

此时，如果 $f''(\xi)>0$，则 $f(\xi)$ 是函 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的极小值；如果 $f''(\xi)<0$，则 $f(\xi)$ 是函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的极大值。所以，函数 $y=f(x)$ 在点 ξ 处取得极值，即 ξ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点。

第二步：证明函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一个极值点。

采用反证法。设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有两个极值点分别为 ξ_1 和 ξ_2，不妨设 $a<\xi_1<\xi_2<b$，由于 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内一阶可导以及在 ξ_1 和 ξ_2 点处分别取得极值，因此有：

$f'(\xi_1)=0$ 及 $f'(\xi_2)=0$。

此时，由于 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数，因此，导函数 $f'(x)$ 满足：

(1) $f'(x)$ 在闭区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续；

(2) $f'(x)$ 在开区间 $[\xi_1,\xi_2)$ 内可导；

(3) $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

即导函数 $f'(x)$ 满足引理全部条件。因此，至少存在一点 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使得：$f''(\xi_3)=0$。

当 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ 时，由于 $a<\xi_1<\xi_2<b$，因此，显然有 $a<\xi_1<\xi_3<\xi_2<b$，于是，$f''(\xi_3)=0$ 与所给条件在区间 (a,b) 内 $f''(x)\neq0$ 是相互矛盾的。

因此，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一个极值点。

利用零点定理可以判断方程根的存在性，利用本定理可以判断函数极值的存在性。由此可见，本定理与零点定理有异曲同工之妙。下面通过一个实例进一步说明此定理的应用。

例　求证 $f(x)=x^4+x^2-1$ 在 $(-1,1)$ 内有且只有一个极值点。

证明：由题意可知 $f(x)=x^4+x^2-1$ 在上 $[-1,1]$ 连续，

在 $(-1,1)$ 内，$f'(x)=4x^3+2x$，$f''(x)=12x^2+2\neq0$，

又 $f(-1)=f(1)=1$

根据定理可知，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有且只有一个极值点。

文章给出判断函数极值的结论，目的是为工程技术人员和经济管理人员提供一种解决极值问题的简便有效的判断方法。特别是当函数比较抽象、复杂，方程 $f'(x)=0$ 难以求解，也不便于判断 $f'(x)$ 的符号，同时难以精确计算二阶导数值，而这类问题在实际当中经常遇到，文章方法解决此类问题比较实用，当然在理论上也有一定的价值。

参考文献：

[1] 郭大钧. 数学分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1982.

[2] 张筑生. 数学分析新讲（一）[M]. 北京：北京大学出版社，1990.

[3] 卢丁. 数学分析原理 [M]. 赵慈庚，译，北京：人民教育出版社，1979.

[4] 董鹤年. 二元函数极值的一阶偏导判定方法 [J]. 青岛化工学院学报，2001 (1)：96－97.

[5] 卜红彧. 一类非线性时变种群扩散系统的最优边界控制问题（Ⅱ）[J]. 辽东学院学报：自然科学版，2014，21 (1)：50－52.

（责任编辑：龙海波）

A New Way to Judge Whether a Function Has Unique Extreme Value

LI Chang－hui

(*Teacher's College, Eastern Liaoning University, Dandong* 118003, *China*)

Abstract: Present methods for determining whether a function has one or more extreme values have more or less problems. In this study, a convenient and efficient method to judge whether a function has a unique extreme value is proposed by using second derivative and mean value theorem.

Key words: calculus; extreme value; mean value theorem