【基础科学理论与应用】 DOI：10.14168/j.issn.1673－4939.2015.03.16

年龄相关的种群系统的最优边界控制

卜红彧 ①

（辽东学院 师范学院，辽宁 丹东 118003）

摘　要：讨论了一类与年龄相关的时变种群系统最优边界控制问题，利用 Banach 空间的 Saks－Masur 引理，证明了系统最优边界控制的存在唯一性，所得结果可为种群系统控制问题的实际研究提供必要的数学理论基础。

关键词：年龄相关；种群系统；最优边界控制；存在唯一性

中图分类号：O231.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－4939（2015）03－0225－03

1 引言

文章讨论如下的数学模型(S)：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}+\mu(r,t)p(r,t)=0,\text{在 } Q=\Omega\times(0,T)\text{ 内},\\ p(0,t)=\int_0^A\beta(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r+v(t),\text{在}(0,T)\text{ 内},\\ p(r,0)=p_0(r),\text{在 }\Omega=(0,A)\text{ 内}.\end{cases}\qquad(1)$$

在上述单种群数学模型中，$r\in[0,A]$ 表示年龄，$t\in[0,T]$ 表示时间；$p(r,t)$ 是时刻 t 年龄为 r 的种群年龄密度函数；$\mu(r,t)\geqslant 0$ 是种群的死亡率；$\beta(r,t)$ 是种群的生育率；$p_0(r)\geqslant 0$ 是时刻 $t=0$ 的种群年龄密度的初始分布；$v(t)\geqslant 0$ 在系统(S)中为控制量。引进性能指标泛函

$$J(v)=\left(\int_Q|p(r,t;v)-p^*(r,t)|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(2)$$

其中 $p^*(r,t)\in L^2(Q)$ 是理想状态函数。

实际问题为：

$$J(u)=\inf_{v\in U_{ad}}J(v)\qquad(3)$$

其中

$$U_{ad}=U\text{ 的非空闭凸子集},U=L^2(0,T).\qquad(4)$$

对于种群系统的控制问题，国内外大量学者做了很多工作[1-3]。文献[4][5]讨论了单种群系统广义解的存在惟一性；文献[6]讨论了两种群竞争系统的最优边界控制问题；文献[7][8]讨论了单种群系统的最优边界控制问题。本文在证明最优边界控制的存在惟一性上，运用了 Banach 空间的 Saks－Masur 引理，所得结果可为种群系统控制问题的实际研究提供必要的理论基础。

2 基本假设

引进函数

$$\varphi(t)=\int_0^A\beta(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r.\qquad(5)$$

文章始终假定下面的条件成立：

(H_1) $\mu(r,t),\beta(r,t)\in C(\overline{Q})$ 且 $0\leqslant\mu(r,t)\leqslant\bar{\mu}<+\infty$ 在 $\overline{Q}$ 上；

(H_2) $p_0(r)\in L^2(\Omega),v(t)\in L^2(0,T)$ 且 $p_0(0)=\varphi(0)+v(0)$.

定理 1[3]　若假设$(H_1)-(H_2)$成立，则问题(1)在 $L^2(Q)$ 中存在唯一解 $p(r,t)$，并且有解析表达式

① **收稿日期**：2015－06－17
基金项目：辽东学院青年基金项目（2014Q19）
作者简介：卜红彧（1981—），女，吉林双辽人，硕士，讲师，研究方向：分布参数系统控制。

$$p(r,t)=[p_0(r-t)+\varphi(t-r)+v(t-r)]e^{-\int_0^r\mu(\sigma,\sigma+t-r)d\sigma} \tag{6}$$

其中

$$\varphi_0(t;v)=F(t;v)=\int_0^A K(r,t)[p_0(r-t)+v(t-r)]dr \tag{7}$$

$$\varphi_n(t;v)=\varphi_0(t;v)+\int_0^A K(r,t)\varphi_{n-1}(t-r)dr \tag{8}$$

$$K(r,t)=\beta(r,t)e^{-\int_0^r\mu(\sigma,\sigma+t-r)d\sigma} \tag{9}$$

3　最优控制的存在性

定理2　设$p_1(r,t)$,$p_2(r,t)$分别是系统(S)对应于$v_1(t)$与$v_2(t)$在$L^2(Q)$中的广义解,若$0\leqslant v_1(t)\leqslant v_2(t)$ a.e. 于Q内,则

$$p_1(r,t)\leqslant p_2(r,t)\ a.e\text{ 于 }Q\text{ 内}. \tag{10}$$

证明　由定理1,$p_i(r,t)(i=1,2)$的解析表达式为:

$$p_i(r,t)=[p_0(r-t)+\varphi_i(t-r)+v_i(t-r)]e^{-\int_0^r\mu(\sigma,\sigma+t-r)d\sigma} \tag{11}$$

其中

$$\varphi_{0,i}(t;v)=F_i(t;v)=\int_0^A K(r,t)[p_0(r-t)+v_i(t-r)]dr \tag{12}$$

$$\varphi_{n,i}(t;v)=\varphi_{0,i}(t;v)+\int_0^A K(r,t)\varphi_{n-1,i}(t-r)]dr,\ (i=1,2) \tag{13}$$

且

$$\varphi_i(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{n,i}(t),\forall t\in(0,T). \tag{14}$$

事实上,由$0\leqslant v_1(t)\leqslant v_2(t)$,有

$$\varphi_{0,1}(t;v)=F_1(t)=\int_0^A K(r,t)[p_0(r-t)+v_1(t-r)]dr\leqslant\int_0^A K(r,t)[p_0(r-t)+v_2(t-r)]dr=F_2(t)=\varphi_{0,2}(t) \tag{15}$$

当$n=1$时有

$$\varphi_{1,1}(t;v)=\varphi_{0,1}(t;v)+\int_0^A K(r,t)\varphi_{0,1}(t-r)dr\leqslant\varphi_{0,2}(t;v)+\int_0^A K(r,t)\varphi_{0,2}(t-r)dr=\varphi_{1,2}(t;v) \tag{16}$$

假设当$n=k$时,$\varphi_{k,1}(t;v)\leqslant\varphi_{k,2}(t;v)$,$\forall t\in(0,T)$成立,则由(13)可得

$$\varphi_{k+1,1}(t;v)=\varphi_{0,1}(t;v)+\int_0^A K(r,t)\varphi_{k,1}(t-r)dr\leqslant\varphi_{0,2}(t;v)+\int_0^A K(r,t)\varphi_{k,2}(t-r)dr=\varphi_{k+1,2}(t;v),\forall t\in(0,T) \tag{17}$$

则由数学归纳法知,对任意的自然数n均有

$$\varphi_{n,1}(t;v)\leqslant\varphi_{n,2}(t;v),\forall t\in(0,T) \tag{18}$$

在(18)中令$n\to\infty$取极限,由(14)可得

$$\varphi_1(t;v)\leqslant\varphi_2(t;v),\forall t\in(0,T). \tag{19}$$

引理1　若U_{ad}由(4)给出,则由(2)确定$J(v)$的是严格凸泛函.

证明　对于任意$v_1,v_2\in U_{ad},v_1\neq v_2,0<\lambda<1$,令$v=\lambda v_1+(1-\lambda)v_2$,则由(6):

$$\begin{aligned}p(r,t;v)&=p(r,t;\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)\\&=[p_0(r-t)+\varphi(t-r)+\lambda v_1(t-r)+(1-\lambda)v_2(t-r)]e^{-\int_0^r\mu(\sigma,\sigma+t-r)d\sigma}\\&=\lambda[p_0(r-t)+\varphi(t-r)+v_1(t-r)]e^{-\int_0^r\mu(\sigma,\sigma+t-r)d\sigma}\\&\quad+(1-\lambda)[p_0(r-t)+\varphi(t-r)+v_2(t-r)]e^{-\int_0^r\mu(\sigma,\sigma+t-r)d\sigma}\\&=\lambda p(r,t;v_1)+(1-\lambda)p(r,t;v_2)\end{aligned} \tag{20}$$

则若$p(r,t;v_i)=p(v_i),(i=1,2)$,由(20)有:

$$\begin{aligned}&[J(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)]^2\\&=\int_Q|p(r,t;\lambda v_1+(1-\lambda)v_2)-p^*(r,t)|^2drdt\\&=\int_Q|\lambda p(v_1)+(1-\lambda)p(v_2)-p^*(r,t)|^2drdt\\&=\lambda^2\int_Q|p(v_1)-p^*(r,t)|^2drdt+2\lambda(1-\lambda)\int_Q(p(v_1)-p^*(r,t))(p(v_2)-p^*(r,t))drdt\\&\quad+(1-\lambda)^2\int_Q|p(v_2)-p^*(r,t)|^2drdt\leqslant(\lambda J(v_1))^2\\&\quad+2\lambda(1-\lambda)\left(\int_Q(p(v_1)-p^*(r,t))^2drdt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_Q(p(v_2)-p^*(r,t))^2drdt\right)^{\frac{1}{2}}+((1-\lambda)J(v_2))^2\\&=(\lambda J(v_1))^2+2\lambda(1-\lambda)J(v_1)J(v_2)+((1-\lambda)J(v_2))^2\\&=(\lambda J(v_1)+(1-\lambda)J(v_2))^2\end{aligned}$$

于是

$$J(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2\leqslant\lambda J(v_1)+(1-\lambda)J(v_2). \tag{21}$$

定理3　设$p(v)$为由问题(1)所描述的系统

(S) 的状态,性能指标泛函 $J(v)$ 由(2)给定,则存在唯一的 $u \in U_{ad}$,使

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \tag{22}$$

证明　在 U_{ad} 中任取极小化序列 $\{v_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \tag{23}$$

且满足

$$J(v_{n+1}) \leqslant J(v_n),\ n = 1,2,\cdots \tag{24}$$

由于 U_{ad} 是 $L^2(0,T)$ 中的非空闭凸子集,则 U_{ad} 是序列式弱闭集。可以抽取 v_n 的一个子序列,记作 $\{v_n\}$,使得

$$v_n \to u \text{ 在 } L^2(0,T) \text{ 中弱}, u \in U_{ad}.$$

由 Saks – Masur 引理,存在 $\{v_{n+j}\}(j = 0,1,2,\cdots)$ 的一个有限凸组合 $e^{(n)} = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} v_{n_i}^{(n)}$,$\lambda_i^{(n)} \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} = 1, n_i \geqslant n$,使得

$$\lim_{n\to\infty} e^{(n)} = u \text{ 在 } L^2(0,T) \text{ 中强收敛},\ u \in U_{ad} \tag{25}$$

由 $J(v)$ 的严格凸性及(24),有

$$J(e^{(n)}) = J\left(\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} v_{n_i}^{(n)}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} J(v_{n_i}^{(n)}) \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} J(v_n) = J(v_n)$$

在上述不等式中令 $n \to \infty$ 取极限,由(23)(25)得

$$J(u) = \lim_{n\to\infty} J(e^{(n)}) \leqslant \lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v) \tag{26}$$

另一方面,显然有

$$J(u) \geqslant \inf_{v \in U_{ad}} J(v),\ u \in U_{ad} \tag{27}$$

由(26)(27)有

$$J(u) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v). \tag{28}$$

参考文献:

[1] PRATO G, LANNELI M. Boundary control problem for age – dependent equations [J]. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1994, 155: 91 – 100.

[2] ANITA S. Analysis and control of age – dependent population dynamics [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000.

[3] 陈任昭, 张丹松, 李健全. 具有空间扩散的种群系统解的存在惟一性与边界控制 [J]. 系统科学与数学, 2002, 22 (1): 1 – 13.

[4] 陈任昭, 李健全, 付军. 与年龄相关的非线性种群扩散方程广义解的存在性 [J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2001, 33 (3): 3 – 13.

[5] 陈任昭, 李健全. 年龄相关的非线性种群扩散系统广义解的惟一性 [J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2002, 34 (3): 1 – 8.

[6] 卜红彧, 付军. 一类线性种群竞争系统的最优边界控制 [J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2012, 10 (5): 513 – 517.

[7] 卜红彧. 一类非线性时变种群扩散系统的最优边界控制问题 (I) [J]. 辽东学院学报: 自然科学版, 2013, 20 (4): 271 – 274.

[8] 卜红彧. 一类非线性时变种群扩散系统的最优边界控制问题 (II) [J]. 辽东学院学报: 自然科学版, 2014, 21 (1): 50 – 52.

(责任编辑: 龙海波)

Optimal Boundary Control for Age – dependent Population System

BU Hong – yu

(*Teacher's College*, *Eastern Liaoning University*, *Dandong* 118003, *China*)

Abstract: The optimal boundary control for a class of age – dependent time – varying population system was discussed. The existence and uniqueness of the optimal boundary control for the system were proved by using Saks – Masur Lemma in Banach space. These results obtained may provide a necessary theoretical basis for the practical study of the control problems in population systems.

Key words: age – dependence; population system; optimal boundary control; existence and uniqueness