【基础科学理论与应用】
DOI：10.14168/j.issn.1673－4939.2015.03.15

一个二维纯竹林系统的自由边界问题

徐龙封[1]，吴汉兵[2]，江小国[3] ①

（1.安徽工业大学 工商学院，安徽 马鞍山 243002；2.安徽工业大学 教务处，安徽 马鞍山 243002；3.安徽工业大学 商学院，安徽 马鞍山 243002）

摘　要：考虑了一个二维纯竹林发展系统自由边界问题。这类系统初始状态与林木总量有关，而边界状态又取决于系统的初始状态，系统的边界不满足通常的三类条件之一。这种系统固定边值问题就很难处理，自由边界问题还没有见到类似结果。文章通过在“竹龄－直径”定义区域内引进一种特殊的曲线族，避开提边界条件。再利用选择恰当的林木直径尺度量纲技巧，提出了一个适定的二维纯竹林发展系统自由边界模型，最后综合拉特征线、先验估计、构造初始状态积分方程、迭代、不动点定理等技巧证明了这个系统整体古典解的存在唯一性。

关键词：二维系统；自由边界；特征线；古典解；积分方程

中图分类号：O175.12；O175.1　**文献标志码**：A　**文章编号**：1673－4939（2015）03－0218－07

1　引言

一维纯林发展系统有许多学者研究过，文献[1]对早期的研究作了较完整的介绍。徐龙封研究一维纯林发展系统的自由边界问题古典解存在唯一性[2]。郑志刚提出了一般多维纯林发展系统模型概念[3]。吴汉兵研究了二维纯林发展系统古典解存在唯一性[4]。尤添革提出了一维毛竹林发展系统的概念[5]。曹倩研究了一维纯竹林发展系统自由边界问题古典解存在唯一性[6]。徐龙封研究了二维固定边界的纯竹林系统古典解的存在唯一性[7]。卜红彧研究了一类非线性时变种群扩散系统的最优边界控制问题[8]。本研究主要研究一类二维自由边界的纯竹林发展系统。

分别用 x,y 表示竹龄与竹木的直径；并分别用 l,d 表示 x,y 的最大可能取值；直径与竹龄间满足 $k_1(x)\leqslant y\leqslant k_2(x)$，其中 $k_1(x),k_2(x)$ 都连续严格单调增；时刻 t 林龄小于或等于 x 且直径小于或等于 y 的竹木林分面积总量为 $N(x,y,t)$（林龄与直径的面积分布函数），由于竹林面积很大，$N(x,y,t)$ 可以看做是 x,y 和 t 的连续函数，且其偏导数 $\frac{\partial^2 N(x,y,t)}{\partial x\partial y}=p(x,y,t)$，$\frac{\partial N(x,y,t)}{\partial t}$ 也都连续，$p(x,y,t)$ 称为纯竹林林龄与直径面积的密度函数。$\mu(x,y,t)$ 为相对采消率，其意义为时刻 t 竹龄为 x 直径为 y 的竹木单位时间内采消面积和剩余面积的比值。$\phi_1(x,y)$，$\phi_2(x,y)$ 分别为竹木的林龄平均增长以及直径平均增长的速度。$p_0(x,y)=p(x,y,0)$。$1\geqslant\beta(t)\geqslant\beta_0>0$ 为时刻 t 保留竹笋面积与采消面积的比值。$g(x,y,t)$ 为时刻 t 林龄为 x 直径为 y 的竹子发出新笋子概率。因此可以把纯竹林（只有一种竹子）的林龄、直径密度结构发展过程描述为下列模型。

① 收稿日期：2015－05－14
基金项目：国家自然科学基金青年基金项目（31300125）；安徽省 2014 年度高校省级人文社会科学研究课题（SK2014A185）；安徽省哲学社会科学规划重点专项研究课题（AHSKHQ2014D001）
作者简介：徐龙封（1952—），男，安庆市人，教授，研究方向：偏微分方程。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial(\varphi_1(x,y)p)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\varphi_2(x,y)p)}{\partial y}=-\mu(x,y,t)p-k(t)f(N(t))p,\\ 0<x<l,k_1(x)\leqslant y\leqslant k_2(x),0<t\leqslant T,\\ p(0,0,t)=\beta(t)\int_0^l \mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)} g(x,y,t)p(x,y,t)\mathrm{d}y,0\leqslant t\leqslant T,\\ p(x,y,0)=p_0(x,y)\geqslant 0,0\leqslant x\leqslant l,k_1(x)\leqslant y\leqslant k_2(x),\\ N(t)=\int_0^l \mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}p(x,y,t)\mathrm{d}y,0\leqslant t\leqslant T.\end{cases} \tag{1}$$

这里 $\phi_1(x,y)$,$\phi_2(x,y)$ 也表示竹子林龄量纲和直径量纲相对于时间量纲的比(参考[3])。显然 x 与 t 量纲一样,因此 $\varphi_1(x,y)\equiv 1$,$\varphi_2(x,y)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$k_1(x)\leqslant\varphi_2(x,y)\leqslant k_2(x)$,$k_1(0)=k_2(0)=0$,且 $y=k_i(x)$ 时,$\varphi_2(x,y)=k_i(x)$,$i=1,2$. 为了叙述简单起见,不妨设适当选择 y 的计量单位,使 $d=k_2(l)=l$. 设常数 $0\leqslant\varepsilon<1$,记 $\phi_2(x,y)=\phi(x,y)$,$y=k_1(x)$,$y=k_2(x)$,$x=l-\varepsilon$ 围成的曲边三角形区域为 Ω^ε,$Q_T^\varepsilon=\Omega^\varepsilon\times(0,T]$,$\Omega^0=\Omega$,$Q_T^0=Q_T$(见图 1)。

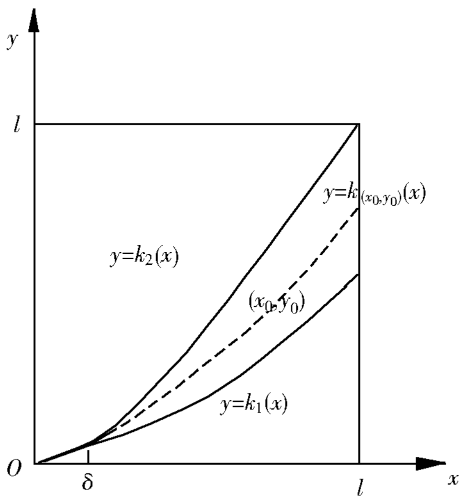

图1　系统的二维存在区域

设边界相容性条件 $\beta(0)\int_0^l \mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}\mu(x,y,0)\cdot p_0(x,y)\mathrm{d}y=p_0(0,0)$ 满足。系统(1) 古典解的存在唯一性在[7] 中已经解决。

2　模型与假设

其实二维纯林发展系统的采伐边界是受多方面因素影响的,系统的采伐边界应当是一个二维的自由边界 $x=h(y,t)$,表示只要林龄达到 $h(y,t)$ 的树木都全部被采光。不妨假设 $h(y,t)=\omega(t)\cdot G(y,N(t))$,其中 $\omega(t)$ 是关于 t 的一个周期函数,为方便推证,不失一般性我们假设:$\omega(t)=\beta_0=1$ 从而 $h(y,t)=G(y,N(t))\cdot G(y,H)\in O^{1,1}([0,1]\times[0,\infty))$,$l-\varepsilon_0\leqslant G\leqslant 1$,要做的就是求一对函数 $(p(x,t),h(y,t))$ 且满足下列系统(2).

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}+\phi(x,y)\frac{\partial p}{\partial y}=-\mu^h(x,y,t)p-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}p \tag{2a}$$

$(x,y)\in\Omega^{h,t}$,$t\in(0,T]$,

$$P(0,0,t)=\beta(t)\iint_{Q_T{}^{h,t}}g(x,y,t)p(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2b}$$

$$p(x,y,0)=p_0(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in\bar{\Omega} \tag{2c}$$

$$N(t)=\iint_{Q_T{}^{h,t}}p(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2d}$$

其中 $\Omega^{h,t}$ 为 $y=k_1(x)$,$y=k_2(x)$,$x=h(y,t)$ 围成的曲边三角形区域,令 $\Omega_T{}^{h,t}=\cup_{0<t<T}\Omega^{h,t}$. 其中 $h(y,t)$ 满足:对于任意常数 $\varepsilon_0>0$,有 $l-\varepsilon_0<h(y,t)\leqslant l$. 根据实际需要对相关资料作如下符合条件的一些假设:

(H_1) 令:$\prod=\{N(t)\in O^1([0,T]):N(0)=\int_0^l\mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}p_0(x,y)\mathrm{d}y,N(t)\geqslant 0,\|N(t)\|\leqslant M_0\}$,其中 M_0 为待定的常数。对任意 $N(t)\in\prod$,$h(y,t)\in O^1([0,T])$,$0<n_0\leqslant h(y,t)\leqslant n_1<l$,$n_0=G(M_0)$,$n_1=G(0)$,$h(y,0)=b$. 由于林龄随时间增长的速度为1,在任意时刻 t 均有 $\partial_t h(y,t)<1$. 若当 x 充分大时,采伐率 μ 是依赖于 $h(y,t)$ 的,可设存在正的常数 a_0,a_1,a_2,和充分小的实数 $\varepsilon_0>0$ 及下面的函数 $a(x,y,h(y,t))\in O^{1,1}(\overline{Q_T{}^{h,t}})$,$a(x,y,h(y,t))\geqslant a_0$,$\|a(x,y,h(y,t))\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T-Q_T{}^{h,t})}\leqslant a_1$ 对任意 $t\in[0,T]$,$h(y,t)-x<\varepsilon_0$,有 $\mu^h(x,y,t)=a(x,y,t,h(y,t))/(h(y,t)-x)^\alpha$,$\alpha\geqslant 1$,同时有 $\|\mu\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T{}^{h(y,t)-\varepsilon_0})}\leqslant a_2$.

(H_2) $\dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\in C^1(\bar{\Omega})$,在 $\bar{\Omega}$ 上的任意点 (x_0,y_0),存在如下唯一光滑曲线

$y=k_{(x_0,y_0)}(x)$,$k_{(x_0,y_0)}(0)=0$,$k_{(x_0,y_0)}(x_0)=y_0$

还满足 $k'_{(x_0,y_0)}(x)=\phi(x,k'_{(x_0,y_0)}(x))$, $k_1(x)\leqslant y=k_{(x_0,y_0)}(x)\leqslant k_2(x)$. 同时可以算出沿着该曲线有$\dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\equiv 0$.

(H_3) 存在一非常小的常数 $\delta>0$，当 $x\in[0,\delta]$ 时，$k_1(x)=k_2(x)=k(x)$，其中 $k>0$ 为常数，对任意的 $\xi\in[0,h(y,t)]$，$(x,y)\in\bar{\Omega}$，$\left|\dfrac{\partial k'_{(x,y)}(\xi)}{\partial x}\right|\leqslant L$，$\left|\dfrac{\partial k'_{(x,y)}(\xi)}{\partial y}\right|\leqslant L$（$L$ 为常数）。

(H_4) $h(y,t)$ 是一个光滑连续的函数，且对任意的 $\xi\in[0,h(y,t)]$，$(x,y)\in\bar{\Omega}$，$\left|\dfrac{\partial h(y,t)}{\partial t}\right|\leqslant m\left|\dfrac{\partial H}{\partial t}\right|$，$\left|\dfrac{\partial h(y,t)}{\partial y}\right|\leqslant m$，其中 m 为常数。

注：文章中出现的 $p\in O^{1,1}(\bar{Q}_T)$ 是指函数 P 关于时间变量 t 和空间变量 (x,y) 都有一致有界的偏导数；$O^1(\Omega)$ 表示 Ω 上有一致有界导数的函数构成的空间（见[9]）。

定理　设 $p_0\in O^1(\bar{\Omega})$，$\beta(.)\in O^1([0,T])$，且存在一正的常数 M 使得 $\|g(x,y,t)\|_{O^1(\bar{Q}_T)}\leqslant M$，$\|\phi(x,y)\|_{O^1(\bar{Q}_T)}\leqslant M$，则系统(2) 存在唯一的非负解 $p_h(x,y,t)\in O^{1,1}(\bar{Q}_T)$，若在 Ω 上对任意的 (x,y) 均有 $p_0(x,y)>0$，则在 Q_T 上有，$p_h(x,y,t)>0$，$p(l,y,t)=0$，$p(x,l,t)=0$，并存在正的常数 m_0，对任意的 $t\in[0,T]$，$N(t)\geqslant m_0$.

3　定理的存在性证明

引理1　对于任意取定的 $\tilde{N}(t)\in\prod$，由自由边界函数定义，有对应的 $\tilde{h}(y,t)$ 若对任意的点 $(x,y,t)\in Q_T\cap\{x\geqslant t\}$，$p(s)$ 为一动点，且满足：

$p(s)=(x-t+s,k'_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s),\tilde{h}(y,t))$

不妨设 $\Phi(x,y,t)=\exp\{-\int_0^l\mu^{\tilde{h}}(p(s))\mathrm{d}s\}$，则存在一个仅依赖于 $a_1,a_2,l,L,M,m,\varepsilon_0$ 正常数 C_0，使得 $\|\Phi(x,y,t)\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T\cap\{x\geqslant t\})}\leqslant C_0$.

证明　由 $(H_1)-(H_4)$，知当 $x\leqslant\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0$ 时，结论显然是成立的；下面考虑当 $x>\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0$ 时，并设 $\alpha=1$ 则有

$$\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x}=-\int_0^l\{\mu_1{}^{\tilde{h}}p(s))+\mu_2{}^{\tilde{h}}p(s))k'_{(x,y)}(x-t+s)\}\mathrm{d}s$$
$$\cdot\mathrm{eps}\{-\int_0^l\mu^{\tilde{h}}(p(s))\mathrm{d}s\}-\int_0^l\{\mu_2{}^{\tilde{h}}(p(s))$$
$$\cdot\left[\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}+k''_{(x,y)}(x-t+s)\right](x-t+s)\}\mathrm{d}s$$
$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\tilde{h}}p(s))\mathrm{d}s\}=-\int_0^{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\{\mu_1{}^{\tilde{h}}(p(s))$$
$$+\mu_2{}^{\tilde{h}}(p(s))k'_{(x,y)}(x-t+s)\}\mathrm{d}s\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\tilde{h}}p(s))\mathrm{d}s\}$$
$$-\int_0^{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\{\mu_2{}^{\tilde{h}}(p(s))\left[\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}+k''_{(x,y)}(x-t+s)\right]$$
$$\cdot(x-t+s)\}\mathrm{d}s\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\tilde{h}}p(s))\mathrm{d}s\}$$
$$-\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^0\frac{\partial[a(p(s))/\tilde{h}(y,t)-x+t-s]}{\partial x}\mathrm{d}s$$
$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\tilde{h}}(p(s))\mathrm{d}s\}.$$

其中 $\mu_1{}^{\tilde{h}}(p(s))$，$\mu_2{}^{\tilde{h}}(p(s))$，$\mu_3{}^{\tilde{h}}(p(s))$ 分别表示 $\mu^{\tilde{h}}(p(s))$ 关于动点 $p(s)$ 的第一坐标，第二坐标，第三坐标的导数，而由 (L_3) 中的$\dfrac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}$，可知

$$\left|\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}\right|\leqslant L,\ |k'_{(x,y)}(x-t+s)|\leqslant M,$$
$$|k''_{(x,y)}(x-t+s)|\leqslant M$$
$$\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x}\right|\leqslant\exp\{-\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\mu^{\tilde{h}}(p(s))\mathrm{d}s\}a_2[1+(L$$
$$+M)(\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0)+M](\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0)+a_1[1+(L+M)(\tilde{h}(y,t)$$
$$-\varepsilon_0)+M]\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\frac{1}{\tilde{h}(y,t)-x-t-s}\mathrm{d}s$$
$$\cdot\exp\{-\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\mu^{\tilde{h}}(p(s))\mathrm{d}s\}$$
$$+a_1\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\frac{1}{(\tilde{h}(y,t)-x-t-s)^2}\mathrm{d}s$$
$$\cdot\exp\{-\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\mu^{\tilde{h}}(p(s))\mathrm{d}s\}$$
$$\leqslant a_2[1+(L+M)(\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0)+M](\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0)$$
$$\cdot a_0\exp\left\{-\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\frac{1}{\tilde{h}(y,t)-x-t-s}\mathrm{d}s\right\}$$
$$+\left\{a_1\frac{\tilde{h}(y,t)-x}{\varepsilon_0}[1+(L+M)(\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0)+M]\left(-\ln\frac{\tilde{h}(y,t)-x}{\varepsilon_0}\right)\right\}$$
$$\cdot a_0\exp\left\{-\int_{\tilde{h}(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^l\frac{1}{\tilde{h}(y,t)-x-t-s}\mathrm{d}s\right\}$$

$$+\left\{a_1\frac{\bar h(y,t)-x}{\varepsilon_0}[1+(L+M)(\bar h(y,t)-\varepsilon_0)+M]\left(\frac{1}{\bar h(y,t)-x}-\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\right\}$$

$$\cdot a_0\exp\left\{-\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{1}{\bar h(y,t)-x-t-s}\mathrm{d}s\right\}\leqslant a_2[1+(L+M)l$$

$$+M]l+\frac{a_1[1+(L+M)l]}{e}+\frac{a_1}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x}=$$

$$-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\left[\mu_2^{\bar h}(p(s))(x-t+s)\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial y}\right]\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\mu_3(p(s)\frac{\partial\bar h(y,t)}{\partial y}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s-\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(p(s))}{\bar h(y,t)-x+t-s}\right)$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s$$

根据上式 $\Phi(x,y,t)$ 关于 y 所求的偏导数可得:

$$\left|\frac{\partial\Phi_{x,y}(x,t,s)}{\partial y}\right|\leqslant\{a_2[L(\bar h(y,t)-\varepsilon_0)+m](\bar h(y,t)$$

$$-\varepsilon_0\}\cdot\exp\left\{-\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{a_0}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s\right\}$$

$$+L\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{a_1}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\left\{-\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{a_0}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s\right\}$$

$$+L\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{a_1}{(\bar h(y,t)-x+t-s)^2}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\left\{-\int_{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}^{l}\frac{a_0}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s\right\}$$

$$\leqslant a_2(Ll+m)l+\frac{a_1L}{e}+\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

$$\frac{\partial\Phi_{x,y}(x-t+s)}{\partial t}=-\mu^{\bar h}(x,y,t)\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s\}$$

$$-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\{\mu_1^{\bar h}(p(s))+\mu_2^{\bar h}(p(s))\cdot[k''_{(x,y)}(x-t+s)(x$$

$$-t+s)+k'_{(x,y)}(x-t+s)]+\mu_3(p(s))\frac{\partial\bar h(y,t)}{\partial t}\}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s\}-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\frac{a_{1t}(p(s))}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s\}$$

$$-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\frac{a_{1t}(p(s))k''_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s)}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s\}$$

$$-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\frac{a_{2t}(p(s))k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\bar h(y,t)-x+t-s}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\mathrm{d}s\}$$

$$-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\frac{a_{3t}(p(s))}{\bar h(y,t)-x+t-s}\frac{\partial\bar h(y,t)}{\partial t}\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s\}$$

$$-\int_0^{\bar h(y,t)-\varepsilon_0-x+t}\frac{a(p(s))}{(\bar h(y,t)-x+t-s)^2}\left[\frac{\partial\bar h(y,t)}{\partial t}+1\right]\mathrm{d}s$$

$$\cdot\exp\{-\int_0^l\mu^{\bar h}(p(s))\}\mathrm{d}s\}$$

同理可知

$$\left|\frac{\partial\Phi_{(x,y,t)}}{\partial t}\right|$$

$$\leqslant\left\{\frac{a_1}{\varepsilon_0}+a_2l(1+Ml+M+m)+\frac{a_1[1+(l+1)M+m]}{e}+\frac{a_1(1+m)}{\varepsilon_0}\right\}$$

其中用 $a_{1t}(p(s))$,$a_{2t}(p(s))$,$a_{3t}(p(s))$ 分别表示 $a(p(s))$ 关于动点$(p(s))$的第一、二、三坐标求导。引理 1 证毕。

引理 2　对于任意取定 $\tilde N(t)\in\prod$ 对应的 $\bar h(y,t)$. 设 $0<T<l-\varepsilon_0$,在定理条件下,系统(2)有唯一的非负解 $p\in O^{1,1}(\bar Q_T)$,且存在一个正的常数 M_1,使得 $\|P\|_{O^{1,1}(\bar Q_T)}\leqslant M_1$,其中 M_1 是依赖于 $\|\mu^{\bar h}\|_{O^{1,1}(\bar Q_T)}$, $\|p_0\|_{O^1(\bar\Omega)}$, C_0。

证明　在 $\bar Q_T$ 上取任意的点 $B(x,y,t)$,在 $t\geqslant x$ 时,由(H_2)知过点 B 并沿与 t 轴相反方向引的特征线

$$\xi=t-x-s,\zeta=\phi(t-x-s)(t-x-s)$$
$$=k'_{(x,y)}(t-x-s)(t-x-s)$$

必与 t 轴相交于一点,设为 $A(0,0,t-x)$,将式(2a)两边分别乘以

$$\exp\int_{t-x}^{s}\mu_h(t-x-b,k'_{(x,y)}(t-x-b)(t-x-b),b)\mathrm{d}b$$

并沿该特征线从 A 到 B 积分,可得一非负函数

$$p(x,y,t)=p(0,0,t-x)\exp\{-\int_{t-x}^{s}\mu^{\bar h}(x-t+s),k'_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s),s)\mathrm{d}s\}$$

$$=p(0,0,t)\exp\{\int_0^x\mu^{\bar h}(\xi,k'_{(x,y)}(\xi)(\xi),t-x$$

$$+\xi)\mathrm{d}\xi\}. \tag{3}$$

当 $t \leqslant x$ 时,同理可得

$$p(x,y,t) = p_0(x-t,k_{(x,y)}(x-t))$$

$$\cdot \exp\{-\int_0^l \mu^{\tilde{h}} \mid (p(s))\mathrm{d}s\} \tag{4}$$

由假设(H_2) 和引理2,可知由式(4) 所确定的 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T \cap \{t \leqslant x\})}$ 仅依赖于 $\|p_{0,(x,y)}\|_{O^1(\bar{\Omega})}$ 和 a_1, a_2, C_0,且为问题$(2a)-(2c)$在区域$\{t \leqslant x\} \cap \bar{Q}_T$上的唯一非负解,再将式(3) 和(4) 都代入式$(2b)$,记 $p(0,0,t) \triangleq u(t)$,可得到一积分方程

$$u(t) = \int_0^l e(\tau,t)u(\tau)\mathrm{d}\tau + f(t) \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} e(\tau,t) = \beta(t)\int_{k_1(t-\tau)}^{k_2(t-\tau)} \mu^{\tilde{h}}(t-\tau,y,t)\cdot\exp\{-\int_0^{t-\tau}\mu^{\tilde{h}}(\xi,k'_{(x,y)}(\xi)\xi,\tau+\xi)\mathrm{d}\xi\}\mathrm{d}y \\ f(t) = \beta(t)\iint_{U_T^{\tilde{h},t}} \mu^{\tilde{h}}(x,y,t)p(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \beta(t)\iint_{U_T^{\tilde{h},t}} \mu^{\tilde{h}}(x,y,t)p_0(x-t,k_{(x,y)}(x,y))\exp\{-\int_0^l \mu^{\tilde{h}} \mid (p(s))\mathrm{d}s\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases} \tag{6}$$

式(6) 中的区域 $U_T^{\tilde{h},t}$ 与 $Q_T^{\tilde{h},j}$ 不同,这里的 x 的范围为 $t \leqslant x \leqslant \tilde{h}(y,t)$.

式(5) 为第二型的 Volterra 积分方程,在 $t-\tau < l-\varepsilon_0$ 时,根据已知条件存在一个常数 C_1,使得 $\|e(\tau,t)\|_{O^1([0,T],[0,T])} \leqslant C_1$,由引理1 可知让 C_1 充分大时,就有 $\|f(y,t)\|_{O^1([0,T])} \leqslant C_1$.

由[10] 中定理4.1.1 知方程(5) 有且仅有一个非负解 $u(t)$,并由式(6) 和假设$(H_1)-(H_4)$ 易推出 $\|u\|_{O^1([0,T])}$ 仅依赖于 $\|\beta(\cdot)\|_{O^1([0,T])}$, $\|g(x,y,t)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$, $\|p_0(x,y)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$ 及 a_2,同时 $u \in O^1([O,T])$;因此式(3) 能唯一地确定 $p(x,y,t) \in O^{1,1}(\bar{Q}_T \cap \{t \geqslant x\})$ 为$(2a)-(2c)$的连续非负解,并且$\|p\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T \cap \{t \geqslant x\})}$仅依赖于 $\|\beta(\cdot)\|_{O^1([0,T])}$, $\|g(x,y,t)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$, $\|p_0(x,y)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$ 与 a_2, C_0,利用边界相容条件得出:当 $t=x$ 时,式(3) 和式(4) 所确定的 $p(x,y,t)$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x}$ 相等。引理2 证毕。

对引理2 求出的 $p(x,t)$,记 $N(t) = \int_0^{\tilde{h}(t)} p(x,t)\mathrm{d}x$. 由假设$(H_1)$,容易看出:$n_0 \leqslant \tilde{h}(t) < b+T, 0 \leqslant N(t) < C_1(b+T)$, $\left|\frac{\partial N(t)}{\partial t}\right| < C_1(b+T)$. 在假设$(H_1)$ 中取 $M_0 = C_1(b+T)$,则 $N(t) \in \prod$,且有相应的 $h(t) = G(N(t))$.

下面证明系统(2) 解的存在性:取 Banach 空间为 $B = C([O,T])$,由假设(H_1) 中的$\prod$ 是 B 的紧凸集,定义一个$\prod$ 到自身的映射 $E:\tilde{N}(t) \to N(t)$,当林分总量 $\tilde{N}(t)$ 给定时,式$(2a) \sim (2c)$ 的解唯一确定,从而 E 是连续且紧。根据 Schauder 不动点定理,E 至少有一个不动点,进一步有 $p \in O^{1,1}(\bar{Q}_T)$, $P \geqslant 0$ 为系统(2) 的解,因此当 $T < l-\varepsilon_0$ 时,定理的存在性得证。

再考虑 $T \geqslant l-\varepsilon_0$. 用 T_0 代替引理2 中的 T,系统(2) 存在非负解 $p \in O^{1,1}(\bar{\Omega} \times [T_0,2T_0])$,并存在常数 M_2 使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[T_0,2T_0])} \leqslant M_2$,其中 M_2 仅依赖于 $\|\mu\|_{O^1(\bar{Q}_T)}$, $\|p(x,y,T_0)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$, C_0.

类推地系统(2) 有非负的解 $p \in O^{1,1}(\bar{\Omega} \times [2T_0,3T_0])$,并存在一正常数 M_3 使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[2T_0,3T_0])} \leqslant M_3$,其中 M_3 是依赖于 $\|\mu\|_{O^1(\bar{Q}_T)}$, $\|p(x,y,2T_0)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$, C_0.

显然有自然数 n 使 $0 < T < nT_0$,系统(2) 有非负解 $p \in O^{1,1}(\bar{\Omega} \times [(n-1)T_0,nT_0])$,并存在常数 M_n 使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[(n-1)T_0,nT_0])} \leqslant M_n$,其中 M_n 仅依赖于 $\|\mu\|_{O^1(\bar{Q}_T)}$, $\|p(x,y,(n-1)T_0)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$, C_0. 然而当 $t = T_0, t = 2T_0, \cdots, t = (n-1)T_0$ 时,$p(x,y,t)$ 也满足$(2a)$,从而 $p(x,y,t) \in O^1(\bar{Q}_T)$. 对任意给定的 T,定理的存在性成立。

4　定理的唯一性证明

定义　设对任意 $v(x,y,t) \in C_0^1(Q_T^t)$,均有

$$\iiint_{Q_T^{h,t}} p\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial x} + \phi(x,y)p\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$= -\iiint_{Q_T^{h,t}} \mu(x,y,t)pv\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{7}$$

则称 $p(x,y,t)$ 是系统(2) 的弱解。

注:将式(7) 中 $Q_T^{h,t}$ 换为 Q_T,则称 $p(x,y,t)$ 是系统(1) 的弱解。

设系统(2) 有两个古典解分别为 p, $\tilde{p}$,且与之对应的两个自由边界函数分别为 $h(y,t)$, $\tilde{h}(y,t)$,显然 p, $\tilde{p}$ 也分别是系统(2) 在 $Q_T^{h,t}$, $Q_T^{\tilde{h},t}$ 内的弱解(古典解必定是弱解)。注意到 p, $\tilde{p}$ 分别在各自的自由边界上取值为零,将 p, $\tilde{p}$ 分别在 $Q_T - Q_T^{h,t}$, $Q_T - Q_T^{\tilde{h},t}$ 作零延拓,仍然分别记为 p, $\tilde{p}$,则 p, $\tilde{p}$ 是系统(1) 在

Q_T 内的两个弱解。令 $w=p-\tilde{p}$ 由系统(1)，有

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}+\phi(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}=-\mu_h(x,y,t)w$$

$$-[\mu(x,y,t)-\mu_{\tilde{h}}(x,y,t)]\tilde{p}-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}w,(x,y)\in\bar{\Omega}-\{(0,0)\},t\in(0,t],\qquad(8a)$$

$$w(x,y,0)=0,0\leqslant x\leqslant l,\qquad(8b)$$

$$w(0,0,t)=p(0,0,t)-\tilde{p}(0,0,t),0\leqslant t\leqslant T,\qquad(8c)$$

$$N(t)-\tilde{N}(t)=\int_0^l\mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}w(x,y,t)\mathrm{d}y,0\leqslant t\leqslant T.\qquad(8d)$$

引理 3　设式(8a)的解为 $w(x,y,t)$，$q,\tilde{q}\leqslant M_1$，在 $\bar{Q}_T\cap\{t\geqslant x\}$ 上取任意的点 $B(\rho,\theta,\tau)$，过该点并沿与 t 轴相反的方向引一特征线

$$\Gamma:\xi=\tau-\rho-s,\zeta=\phi(\tau-\rho-s,\zeta)(\tau-\rho-s)=k'_{(0,\tau)}(\tau-\rho-s)(\tau-\rho-s)$$

且与 t 轴相交的一点设为 $A(0,0,\tau-\rho)$，则存在一常数 $\tilde{M}>0$，有下面的不等式：

$$w^2(\rho,\theta,\tau)\leqslant\tilde{M}w^2(0,0,\tau-\rho)$$

其中 $\tilde{M}$ 是不依赖于 θ,τ 和 ρ。

证明　在式(8a)的两边分别乘以 $w(x,y,t)$，同时沿特征线 Γ 积分，可以得到

$$w^2(\rho,\theta,\tau)=w^2(0,0,\tau-\rho)-2\int_{\tau-\rho}^{\tau}\mu_h(x,y,t)w^2(x,y,t)\mid_\Gamma\mathrm{d}t-2\int_{\tau-\rho}^{\tau}[\mu_h(x,y,t)-\mu_{\tilde{h}}(x,y,t)]\tilde{p}w(x,y,t)\mid_\Gamma\mathrm{d}t\qquad(9)$$

设 $T<l-\varepsilon_0$ 时，由(H_1)，以及 $0\leqslant\mu_h(x,y,t)\leqslant a_2$，知存在一正常数 $\hat{C}$ 使得

$$|\mu_h(x,y,t)-\mu_{\tilde{h}}(x,y,t)|\leqslant\hat{C}|h(y,t)-\tilde{h}(y,t)|=\hat{C}|G(N(t))-G(\tilde{N}(t))|$$

又因为 $G(\cdot)\in O^{1,1}([0,l]\times[0,\infty))$ 且又在有界闭包 $\bar{\Omega}$ 上，故根据 Lipschitz 条件知：存在常数 $C_0>0$，使得

$$|G(y,N(t))-G(y,\tilde{N}(t))|\leqslant C_0|N(t)-\tilde{N}(t)|$$

由此可得：

$$|\mu_h(x,y,t)-\mu_{\tilde{h}}(x,y,t)|\leqslant\hat{C}C_0\iint_\Omega|w(x,y)t|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故式(9)可变为：

$$w^2(\rho,\theta,\tau)\leqslant w^2(0,0,\tau-\rho)+C\int_{\tau-\rho}^{\tau}[w^2(x,y,t)]_\Gamma\mathrm{d}t\qquad(10)$$

令 $\Omega(s)=\int_{\tau-\rho}^{\tau}[w^2(x,y,t)]_\Gamma\mathrm{d}t$，$F=w^2(0,0,\tau-\rho)$ 由式(9)可得

$$\frac{\mathrm{d}\Omega(s)}{\mathrm{d}x}\leqslant C\Omega(s)+F$$

易知 $\Omega(\tau-\rho)=0$，再由 Gronwall 不等式，可得

$$\Omega(s)\leqslant\int_{\rho-\theta}^{s}e^{C(s-\tau+\rho)}F\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{C}e^{Cs}F\qquad(11)$$

由式(10)和式(11)即得

$$w^2(\rho,\theta,\tau)\leqslant\left(\frac{1}{C}e^{C\tau}+1\right)w^2(0,0,\tau-\rho)\equiv\tilde{M}w^2(0,0,\tau-\rho)$$

引理 3 证毕。

现在可以完成定理 1 的证明：取任意的点$(\rho,\theta,\tau)\in\bar{Q}_T\cap\{t\geqslant x\}\triangleq Q_T^1$，由引理 3 有 $w^2(\rho,\theta,\tau)\leqslant\tilde{M}w^2(0,0,\tau-\rho)=\tilde{M}\beta^2(\tau-\rho)\cdot\left[\int_0^l\mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}g(x,y,\tau-\rho)w(x,y,\tau-\rho)\mathrm{d}y\right]^2$ 当 $0<\beta(\tau-\rho)\leqslant 1,0\leqslant g(x,y,\tau-\rho)\leqslant 1,x\geqslant\tau-\rho$ 时，$w(u,v,t)=0$；由 Hölder 不等式

$$w^2(\rho,\theta,\tau)\leqslant\tilde{M}|\Omega|\int_0^l\mathrm{d}u\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}w^2(x,y,\tau-\rho)\mathrm{d}y\qquad(12)$$

取 $\sigma=\sqrt{1/2\tilde{M}|\Omega|}$，令 $Q_{T_1}=Q_T^1\cap\{0\leqslant t\leqslant\sigma\}$，将式(12)两边分别在 Q_{T_1} 上关于 θ,τ,ρ 积分，则有

$$\iint_{Q_{T_1}}w^2(x,y,t)\mathrm{d}\rho\theta\mathrm{d}\tau\leqslant\tilde{M}|\Omega|\cdot\int_0^\sigma\mathrm{d}\tau\int_0^\tau\mathrm{d}\rho\int_{k_1(\rho)}^{k_2(\rho)}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tau-\rho}\mathrm{d}u\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}w^2(x,y,\tau-\rho)\mathrm{d}y$$

$$=\tilde{M}|\Omega|\int_0^\sigma\mathrm{d}\tau\int_0^\tau\mathrm{d}\rho\int_{k_1(\rho)}^{k_2(\rho)}\mathrm{d}\theta\int_0^l\mathrm{d}u\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}w^2(x,y,\tau-\rho)\mathrm{d}y$$

$$=\tilde{M}|\Omega|\int_0^\sigma\mathrm{d}\tau\int_0^l\mathrm{d}u\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}w^2(x,y,t)\mathrm{d}v\int_0^l\mathrm{d}\rho\cdot\int_{k_1(\rho)}^{k_2(\rho)}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant\tilde{M}|\Omega|\sigma[k_2(\sigma)-k_1(\sigma)]\iint_{Q_{T_1}}w^2(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$

故 $\|w\|_{Q_{T_1}}\leqslant\tilde{M}|\Omega|\sigma^2\|w\|_{Q_{T_1}}=\frac{1}{2}\|w\|_{Q_{T_1}}$.

因此在 $\bar{Q}_{T_1}$ 上有 $w\equiv 0$，从而 $p=\tilde{p}$，进一步由式

(2d),可得到 $N(t) = \tilde{N}(t)$,相应地 $h(y,t) = G(y,N(t)) = G(y,\tilde{N}(t)) = \tilde{h}(y,t)$,由引理3,知在 $Q_T^1 \cap \{t - x \leqslant \sigma\}$ 上 $w \equiv 0$;令 $Q_{T_2} = Q_T^1 \cap \{\sigma \leqslant t \leqslant 2\sigma\}$,由引理3,同理可知在 $\overline{Q}_{T_2}$ 上也有 $w \equiv 0$,再根据引理3,知在 $Q_T^2 \cap \{t - x \leqslant 2\sigma\}$ 上是有以此类推下去,最后可知在 $\overline{Q}_T^1$ 上有 $w \equiv 0$ 定理的唯一性得证。

最后,如果在 Ω 上均有 $p_0(x,y) > 0$,由式(4)可见,对任意 $0 \leqslant t \leqslant T_0$,当 $t \leqslant x < l, y < l$ 时,均有 $p(x,y,t) > 0$. 从而式(6)中 $f(t) > 0$. 再由式(5),$u(t) > 0$. 利用式(3),可得对任意 $0 \leqslant t \leqslant T_0$,当 $t \leqslant x < l, y < l$,均有 $p(x,y,t) > 0$. 于是,对任意 $0 \leqslant t \leqslant T_0$,由(2d),$N(t) > 0$. 进一步,不难得到对任意 $0 \leqslant t \leqslant T_0$,$N(t) > 0$. 记 $N(t)$ 在 $[0,T]$ 上的最小值为 m_0,定理证毕。

参考文献:

[1] 陆征一, 周义仓, 数学生物学进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2006: 251 - 264.

[2] XU L F, WU H B. A free - boundary to dynamic system for pure forest [J]. Annals of differential equations, 2010, 26 (2): 227 - 233.

[3] 郑治刚. 同龄纯林的林龄分布结构变化方程 [J]. 系统工程理论与实践, 1996 (4): 90 - 98.

[4] 吴汉兵, 徐龙封. 一个环境依赖型二维纯林发展系统的古典解 [J]. 应用数学, 2010, 23 (4): 751 - 757.

[5] 尤添革, 林秀琴. 毛竹的连续型直径分布变化方程 [J]. 生物数学学报, 2004, 19 (4): 453 - 456.

[6] 曹倩, 李俊, 徐龙封. 一个非线性竹林发展系统的自由边界问题 [J]. 安徽工业大学学报, 2012, 29 (3): 256 - 260.

[7] 徐龙封, 吴汉兵. 一个环境依赖型二维纯竹林发展系统的古典解 [J]. 生物数学学报, 2012, 27 (4): 695 - 703.

[8] 卜红彧, 一类非线性时变种群扩散系统的最优边界控制问题 [J]. 辽东学院学报: 自然科学版, 2014, 21 (1): 50 - 52.

[9] LADYZENSKAYA O A. Linear and quasilinear equations of parabolic type [M] //SMITH S. Translations of Mathematical Monographs. Rhode Island: A. M. S. Providence, 23 (1968): 3 - 9.

[10] 沈以淡. 积分方程 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2002: 18 - 22.

(责任编辑: 龙海波)

Free - boundary Problem of a Two - dimensional Pure Bamboo Forest System

XU Long - feng[1], WU Han - bing[2], JIANG Xiao - guo[3]

(1. *College of Business Administration, Anhui University of Technology, Maanshan* 243002, *China*;

2. *Dean's Office, Anhui University of Technology, Maanshan* 243002, *China*;

3. *College of Business, Anhui University of Technology, Maanshan* 243002, *China*)

Abstract: The free - boundary problem of a two - dimensional pure bamboo forest development system was studied. The initial state of this kind of system relates to the total quantity of the forest, while the boundary condition depends on the initial state. Besides, the boundary can not satisfy one of three kinds of common conditions. Therefore, the boundary problem of this kind of system is difficult to deal with and there have been no similar results. In this study, by introducing a class of special family curves into defined area of "bamboo mature - diameter", the problem of boundary conditions is avoided. Further more, by using the technique of selecting measure dimension of lumber diameter properly, a well - posed two - dimensional forest dynamics system model is proposed. Finally, the existence and uniqueness of the global classical solution of the system are proved by colligating the technique of pulling characteristic curve, a prior estimate, structuring integral equation of initial state, iteration and fixed point theorem.

Key words: two - dimensional system; free - boundary; characteristic line; classical solution; integral equation